Grado en Ingeniería Civil

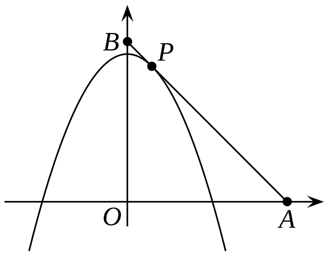
Matemáticas I - Convocatoria septiembre 2015 - Grupos A, B, C y D

1. a) (1 punto) Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [-1,1]$. Prueba que hay algún $c \in [-1,1]$ para el que se verifica la igualdad $f(c) = c^3$.

   b) (1,5 puntos) Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica que $\operatorname{sen} x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$.

2. (2 puntos)

   Calcula un punto $P = (u,v)$, con $u > 0$, de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo OAB determinado por la tangente a la parábola en dicho punto y los ejes coordenados tenga área mínima. Justifica que el resultado obtenido es un mínimo absoluto.



3. (2 puntos) Sea el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$$

   a) Calcula y clasifica los puntos críticos de f.

   b) Calcula los extremos absolutos de f en el conjunto $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 1\right\}$.

4. (2 puntos) Calcula la integral doble:

$$\iint_A \frac{x^3 \mathrm{e}^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}(x,y)$$

   donde el recinto de integración es el conjunto:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}.$$

5. *a*) (0,5 puntos) Enuncia el teorema del valor medio.

   b) (1 punto) Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que $|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \leqslant |x - y|$.

Granada, 2 de septiembre de 2015